FAZI LOGIKA I LOGIČKO – MATEMATIČKA ARGUMENTACIJA U BIOMETRIČKIM METODAMA I DONOŠENJU ZAKLJUČAKA

FUZZY LOGIC AND LOGICAL– MATHEMATICAL ARGUMENTATION IN BIOMETRICAL METHODS AND INFERENCES

Nikola Mićić[1], Đurađ Hajder[1], Mirsad Kurtović[2]

Pregledni rad – *Review paper*

Sažetak

U biološkim naukama[3] logičko–matematička argumentacija podrazumeva prethodno određenje pojma biometričke jedinice posmatranja, a potom pomoću prirodnih brojeva, argumentaciju verovatnoće (relativne frekvencije) pojavljivanja u datim uslovima, tj. dokazivanje nivoa objašnjenih i neobjašnjenih varijacija u ispoljavanju definisanog pojma biometričkih jedinica posmatranja. Dakle, ako znamo da su pojam i broj rezultante apriornog znanja i racionalnog uviđanja, onda znamo i da tako posmatrani pojam i broj imaju određenu korespondenciju. Naime, u biološkim, pa time i u poljoprivrednim naukama, sve biometričke jedince posmatranja su materijalne prirode, pa se određenje pojma biometričkih jedinica posmatranja svodi na apstrahovanje njihove predmetnosti (pojam se shvata kao uopštavanje misli o predmetnosti). Odatle sledi da je broj u biometričkim analizama apstrahovana količina tih prethodno apstrahovanih predmetnosti biometričkih jedinica posmatranja. Ovakvom korespondencijom logika i matematika su funkcionalno povezane, ali se ne mogu svesti jedna na drugu. Međutim, u biometrici se metodološki mora postaviti pitanje logike apstrahovanja imenovanih brojeva i određenja količine atributivnog svojstva (apstrahovanog svojstva biometričke jedinice posmatranja). Ovde se otvaraju i dva nova pitanja: 1) nula u biometrici predstavlja atributivno obeležje (nema ga, nije evidentiran, bez predmetnog obeležja itd.)[4] i 2) apstrahovanje i klasifikacija količina atributivnih obeležja – jezičke promenljive (npr. klasifikacija plodova po krupnoći: sitan, srednje sitan, srednje krupan, krupan, veoma krupan itd.). Evidentno je da se ovde svi zaključci ne mogu izvesti isključivo matematizacijom, odnosno na osnovu iskaza binarne logike, tj. tvdnjom da je iskaz tačan ($\top$) ili da je netačan ($\perp$) [1 ili 0], pa se kao alternativa pojavljuju polivalentni (viševrednosni) logički sistemi, kao što je

---

[1] Poljoprivredni fakultet Univerziteta u Banjaluci / *University of Banja Luka, Faculty of Agriculture*
[2] Poljoprivredno-prehrambeni fakultet Univerziteta u Sarajevu / *Faculty of Agriculture and Food Sciences, University of Sarajevo*
[3] Poljoprivredne nauke u osnovi predstavljaju primenjene biološke nauke.
[4] Atributivna obeležja podrazumevaju neparametarsku biometriku (jer ako *a* jeste nešto, a *b* nije to isto nešto, onda je svejedno kako to tvrdimo, tj. da je *a* toliko postotaka (a / N · 100) ili da *b* nije toliko postotaka (b / N · 100), odnosno, isto je kada tvrdimo da je u voćnjaku 70 % plodova zaraženo sa *Venturia inaequalis* ili da 30 % plodova nije zaraženo sa *Venturia inaequalis* (jedno podrazumeva drugo).

fazi logika. Cilj ovog rada je problematizovanje pitanja logičko–matematičke argumentacije biometričkog zaključivanja u biološkim i poljoprivrednim naukama.

Abstract

In biological sciences, logical–mathematical argumentation implies previous determination of concept biometrical unit of observation and then, using integers, argumentation of probability (relative frequency) of apperance in the given conditions, i.e. determination of the explained and unexplained (residual) variation of defined biometrical unit of observation. Therefore, if we are aware that concept and number are outcomes of a prior and rational thinking, then we consider certain correspondence between a concept and a number, defined in such a way. Particularly, in biological and, thus, agricultural sciences biometrical units of observation are mostly existing, so the determination of concept implies the abstraction of its objectiveness (concept is defined as a process of the abstaction of objectiveness). It follows that, in biometrical analysis, a number is the abstraction of quantity of biometrical unit objectiveness, previously abstracted. For such a correspondence, logic and mathematics are closely related, but not identical. However, in biometrical analyses, there is a methodological query, considering the logic of abstraction of the appointed numbers, and determination of attributive value quantity (abstracted property of biometrical units of observation). Two questions are imposed here: 1) in biometrics, a zero represents an attributive property (do not exist, is not recorded, have no characteristics etc.) and 2) abstraction and classification of quantity of attributive properties by linguistic variables (a classification of fruits by their size: small, medium–small, medium–large, large, very large etc.). It is evident that one can not draw a conclusion here by mathematization, i.e. based on the binary logic predicates, by notions like true ($\top$) or false ($\perp$) [1 or 0], so principles of polyvalent (many–valued) logical systems, like fuzzy–logic, have emerged as an alternative. The objective of this research was to reconsider the question of logical–mathematical argumention in biometrical inferences in biological and agricultural sciences.

UVOD

Logičko–matematička argumentacija u dokazivanju zakonitosti u biološkim i poljoprivrednim naukama predstavlja fundamentalnu metodološku osnovu naučnih istraživanja u ovim oblastima nauke [8, 12, 14]. Logičko–matemetička argumentacija podrazumeva prethodno određenje pojma biometričke jedinice posmatranja, a potom, pomoću imenovanih brojeva argumentaciju verovatnoće pojavljivanja u datim uslovima, tj. dokazivanje nivoa objašnjenih i neobjašnjenih varijacija u ispoljavanju logički definisanog pojma biometričkih jedinica posmatranja. Pritom, neophodno je konstatovati da biometrika kao metoda interakcijske analize eksperimentalnih i instrumentalnih metoda i logičko–matematičke argumentacije u zaključivanju zasnovanom na eksperimentalnim uzorcima[5] [9, 13, 14], nije i nepristrasni arbitar u donošenju zaključaka [7, 13]. Ova činjenica sve više dobija na značaju, jer pasivno oslanjanje na "moćne" softverske alate udaljava istraživače od suštine biometričkih metoda i u konačnom stvara pogrešnu predstavu o odnosu biometričkih i eksperimentalnih metoda, odnosno metodološkog pristupa istraživanju, a samim tim i donošenju zaključaka [16]. Imajući u vidu navedene konstatacije, kao i sve veći razvoj novih naučnih metoda koje otvaraju brojna pitanja i preispituju postojeća znanja, s jedne strane, i novih tendencija u pozicioniranju nauke kao osnovnog procesa u razvoju svakog pojedinca i društva uopšte, ovaj rad ima za cilj da otvori naučnu raspravu o logičko–matematičkoj argumentaciji u izvođenju zaključaka u biološkim i poljoprivrednim istraživanjima. Nesporno je, biometrika je osnovni metod argumentacije[6] u istraživanjima u biološkim i poljoprivrednim naukama, s tim da biometrika ne donosi zaključke[7]. Naime, sve primjenjene metode (instrumentalne, eksperimentalne i biometričke) procjenjuje istraživač i on u konačnom, saglasno svojoj percepciji i logici lične spoznaje donosi zaključke, argumentovane sa određenom biometričkom verovatnoćom [7, 9, 10, 11].

Brojanje i logika matematizacije

Kako se uopšte došlo do matematike, te da li je matematika samo nauka[8], tj. prirodna ili "normativna nauka", odnosno, da li je ona samo intelektualna disciplina, rasprave su koje vodi filozofija matematike i nauke. Međutim, za pitanje primene matematike u biološkim i poljoprivrednim istraživanjima ključna su određenja prema pitanju brojeva i u konačnom odnosu između logike i matematike, tj. primenjene matematike, od koje su se matematičari XX veka uglavnom distrancirali[9].

Van svake sumnje je, da je znanje o brojevima rezultat apriornog i racionalnog uviđanja. Međutim, već na početku sticanja matematičkih znanja, došlo je do krize u poimanju suštine brojeva. Danas znamo da je prirodan broj apstrahovana količina nečega, tj. da on počiva na jednoznačnoj korespondenciji između skupa objekata nekog etalona kojim se taj skup meri ili broji. Krizu u poimanju broja izazvao je pad

5 Eksperimentalni uzorci predstavljaju skup biometričkih jedinica posmatranja na kojima se dovođenjem u izmenjene i kontrolisane uslove sa određenom pouzdanošću modelira, odnosno, projektuje novi hipotetički osnovni skup. Tako se biometričke jedinice posmatranja u eksperimentalnim uzorcima ne koriste za ocenu osnovnog skupa iz koga su uzete, već za dokazivanje izvesnosti i verovatnoće za postojanje nepoznatog i pretpostavljenog osnovnog skupa.

6 Dokaz je metodološko–naučni postupak za dokazivanje istinitosti naučnih postavki (hipoteza). Pri tom razlikujemo tvrdnju koju dokazujemo i argumente dokaza (uzroke, razloge itd.).

7 Zaključak je logički oblik misli koji izražava suvislu povezanost sudova [Zaključak u kome su sudovi međusobno povezani sa određenim stepenom verovatnoće, predstavlja induktivan zaključak, a zaključak u kome su sudovi međusobno suvislo povezani isključivom (nužnom) vezom, predstavlja deduktivan zaključak].

8 U engleskom jeziku, termin *science* označava prirodne nauke koje imaju metod i predmet istraživanja u realnom svetu. Tako se filozofija, a danas i matematika, kao i druge discipline koje imaju svoj metod ali se njihov predmet istraživanja ne nalazi u realnom, tj. čulnom svetu, ne nazivaju naukama.

9 Biologija, a time i poljoprivredne nauke u svojoj osnovi su perceptualne (induktivne), pa se njihov odnos prema matematici u osnovi zasniva na principima kantijanizma, koje savremena matematika uglavnom ignoriše [prema Imanuelu Kantu (1724 – 1804) matematika je empirijska nauka, što znači da postoji samo jedna matematički istinita teorija prostora i vremena].

prve dogme pitagorejaca, po kojoj su sve veličine samerljive (ubeđenje da svako merenje u geometriji mora da bude celobrojan umnožak neke standardne jedinice). Naime, kada je shvaćeno da su stranica kvadrata i njegova dijagonala nesamerljive veličine ($\sqrt{2}$), u matematici tog doba napravljena je jasna pojmovna granica između *broja* i *veličine*. Tako je matematika nastavila da se razvija kroz geometriju, koja se bazirala na veličinama, a brojeve su predstavljali samo prirodni i racionalni brojevi.

Razvoj geometrije dovodi do sledećeg bitnog iskoraka, a to je zasnivanje geometrije na aksiomatskim osnovama koje je definisao Euklid (oko 325 – 265. god. pre n. e.). Tako je u matematici utemeljena aksiomatska metoda, zasnovana na deduktivnom načinu zaključivanja.

Konačno, ovo je tačka u kojoj su prvi put sistematski spojene matematika i logika. Naime, pedesetak godina pre Euklida, Aristotel (oko 384 – 322. god. pre n. e.) je sistematizovao osnovna logička pravila, gde je prvi put obrazložen pojam silogizma, tj. izvođenje zaključaka iz dve premise, a koji, danas, napisan u savremenoj formulaciji glasi (tranzitivnost):

$$\begin{array}{c} \forall x\ (\mathrm{A}(x) \Rightarrow \mathrm{B}(x)) \\ \underline{\forall x\ (\mathrm{B}(x) \Rightarrow \mathrm{C}(x))} \\ \forall x\ (\mathrm{A}(x) \Rightarrow \mathrm{C}(x)) \end{array}$$

Dovoljno je reći da je Aristetolova logika, skoro dve hiljade godina u neizmenjenom obliku, predstavljala jedina i osnovna logička pravila ili spoznaju logike mišljenja i zaključivanja. U istom periodu, matematika je u Evropi stagnirala, i za razliku od Aristotelove logike, bila je predmetom progona hrišćanskih religija[10], dok je na istoku matematici posvećivana velika pažnja [Al Horezmi (780 – 850), Ibn Išak (808 – 873), Al Batani (850 – 929), Al Hajtam (965 – 1040), Omer Hajam (1048 – 1131)].

Matematika, logika, eksperimentisanje, deduktivni i induktivni način zaključivanja, kao i sva druga otvorena pitanja u zapadnom svetu, svoj povratak na scenu naučnog progresa i razvoja doživljavaju sa renesansom, tj. sa Bekonom [Francis Bacon (1561 – 1626)], del Ferom [Scipione del Ferro (1465 – 1526)], Kardanom [Giralomo Cardano (1501 – 1576)], Keplerom [Johannes Kepler (1571 – 1630)], Galileom [Galileo Galilei (1564 – 1642)], Nejperom [John Napier of Merchiston (1550 – 1617)], Fermom [Pierre de Fermat (1610 – 1665)] i Dekartom [Rene Descartes (1596 – 1650)]. Razvoj matematike od pojave renesanse pa do pojave matematičke logike značajno je inteziviran pojavom Gausa [Johan Carl Friedrich Gaus (1777 – 1855)], tvorca aproksimacije metodom najmanjih kvadrata i normalnog rasporeda, a time i matematičke statistike.

[10] Matematika je poistovećivana sa grčkim paganskim nasleđem i Crnom magijom. Sveti Avgustin (354 – 430) je propovedao da su matematičari sklopili pakt sa đavolom, sa ciljem da pomrače čovekov um i okuju ga okovima Pakla. Iako je danas jasno da se ovo odnosi na numerologiju i mistična učenja pitagorejaca, posledice po evropsku matematiku tog perioda pa sve do pojave renesanse u XV veku, bile su pogubne.

Matematika, logika i verovatnoća događanja

Sredinom XIX veka trojica naučnika: Džordž Bul (1815 – 1864), Gregor Mendel (1822 – 1884) i Ludvig Bolcman (1844 – 1906) objavili su svoje rezultate istraživanja kojim su postavljeni temelji za tri naučna polja čija su brojna dostignuća, od tada pa do danas, ključna za definisanje opšteg i posebnog metodološkog pristupa u istraživanju i biometričkoj, tj. logičko–matematičkoj argumentaciji u donošenju zaključaka u biološkim i poljoprivrednim naukama.

Džordž Bul je prvi matematičar koji je logiku posmatrao kao polje na kome se može primeniti algebra, a svoje rezultate je objavio 1854. godine pod naslovom "Zakoni mišljenja". Tako je Bul među matematičarima i logičarima pokrenuo više otvorenih pitanja koja su preko teorije skupova (Georg Kantor, 1845 – 1918) i matematičke logike [Fridrih Frege (1848 – 1925), Bertrand Rasel (1872 – 1970) i Alfred Vajthed (1861 – 1947)] nametnula pitanje aksiomatizacije algebre [Đuzepe Peano (1858 – 1932), David Hilbert (1862 – 1943), Kurt Gedel (1906 – 1978)] koje je i do danas ostalo otvoreno. Konačno, gotovo sva pitanja aksiomatizacije algebre (tj. pitanja aksiomatizacije brojeva) ostala su i danas otvorena, zbog logičkih protivurečnosti i paradoksa[11], kao i nastojanja da se dokaže kontinuum [15]. Iz nastojanja da se zasnuje celovita matematika krajem XIX veka, u XX vek se ulazi sa tri pravca traženja odgovora koji su i danas aktuelni: ***logicizam*** [izvođenje zakona matematike iz logike (Frege, Rasel, Vajthed)], ***formalizam*** ["da li matematička tvrđenja imaju značenje" (Hilbert, Gedel)] i ***intuicionizam*** [intuicija broja, tj. konstruisanje matematike iz broja (Lujcen Brauer 1881 – 1966)]. Sredinom XX veka, zbog sve većeg broja pitanja koja su ostala bez odgovora, otvoren je put za definisanje novih logičkih pristupa i novih načina donošenja zaključaka.

Gregor Mendel je prvi naučnik koji je dokazao da se morfološke osobine biljaka ispoljavaju sa pouzdano određenim relativnim frekvencijama. Rezultate svojih eksperimenata saopštio je 1864. godine na zasedanju Prirodno–istorijskog naučnog društva u Brnu, i objavio rad "*Eksperimenti sa biljnim hibridima"*. Mendelova zapažanja u narednih pedeset godina niko nije razumeo, a ni sam Mendel nije bio upoznat sa zakonima genetike. Izraz genetika, kao nauka o nasleđivanju, prvi put je upotrebljen 1905. godine od strane Bejtsona [Vilijam Bejtson (1861 – 1926)]. Takođe, 1910. godine Morgan[12] potvrđuje lokaciju gena na hromozomima kao nosiocima naslednosti, a tek 1918. godine Fišer[13] objavljuje rad pod nazivom "*Korelacija između*

[11] "***Ako jeste onda nije, a ako nije onda jeste***". U biologiji je evidentno da niko ne može da vidi samoga sebe iz sebe, već da svako može sebe da vidi u nečemu izvan sebe (ljudi se vide materijalno u ogledalu, a ljudski u drugom čoveku, itd.).

[12] Thomas Hunt Morgan (1866 –1945) dobitnik Nobelove nagrade za medicinu 1933. g.

[13] Ronald Fišer (1890 – 1962), evolucioni biolog, matematičar i statističar. Fišer je potvrdio Mendelova istraživanja, a pored brojnih metodoloških pristupa u statistici, definisao je i analizu varijanse kao osnovni

pripadnika iste familije na osnovu Mendelovskog nasleđivanja", čime Mendelova spoznaja konačno dobija priznanje kao prva spoznaja iz oblasti nasleđivanja, tj. genetike. Međutim, Mendelov rad je pre svega uticao na osnivanje biometrike 1901. godine[14], a u konačnom i na definisanje biometričke verovatnoće. Naime, matematička verovatnoća (Andrej Kolmogorov 1903 – 1987) je *a priori* verovatnoća i podrazumeva odnos između povoljnih događaja (ishoda) i svih mogućih događaja. Međutim, sva moguća događanja ili svi mogući uticaji (faktori) u biološkim pojavama nalaze se u različitom opsegu i dinamici i samim tim ne mogu da budu jednoznačni imenilac biometričke verovatnoće, tj., *a posteriori* verovatnoće, kazano matematičkim jezikom.

Ludvig Bolcman bavio se pitanjem svođenja termodinamike na mehaniku tj. traženju objašnjenja za protivurečnost između reverzibilnosti mehaničkih i ireverzibilnosti termodinamičkih procesa, i u konačnom definisao vezu između entropije i funkcije jednočestične gustine verovatnoće. Konačno, Bolcman je razvio teoriju po kojoj je priroda entropije povezana sa verovatnoćom stanja atoma ili molekula u sistemu. Po ovoj teoriji svaki sistem prepušten sam sebi teži ka uspostavljanju ravnoteže odnosno stanju najveće verovatnoće. Tako se dolazi do zaključka da je entropija mera haosa i da sistem (funkcionalna i strukturna organizacija atoma – molekula) prepušten sam sebi teži stanju haosa, kao stanju veće verovatnoće. Svojom teorijom Bolcman je pokazao da u procesu evolucije sistema ka ravnotežnom stanju, pri uslovima očuvanja unutrašnje energije sistema, entropija raste, a pri postizanju ravnotežnog stanja ona prestaje da se menja. Problem u prihvatanju ove teorije predstavljala je dokazana verovatnoća usmerenosti – nepovratnosti procesa, a što je protivurečilo Njutnovim jednačinama po kojima se može očekivati da se sistem spontano vrati u početno stanje. Dakle, Bolcman je dokazao da su procesi koji se odvijaju u prirodi nepovratni i derminisani zakonima verovatnoće.

Fazi logičko i logičko-matematičko zaključivanje

U klasičnoj matematici svaki iskaz je ili tačan ($\top$) ili netačan ($\perp$), i to je osnova binarne logike ($\top$, $\perp$; 1, 0; +, − itd.). Međutim problem nastaje kada se postavi pitanje čiji je odgovor neodređen, odnosno nije samo $\top$ ili samo $\perp$. Tradicionalna logika nalaže da svi iskazi mogu biti istiniti samo ako su u skladu sa tri osnovna principa mišljenja: princip identičnosti, (ne)protivurečnosti i isključenja trećeg [18]. Međutim, početkom XX veka, u skladu sa otvorenim pitanjima aksiomatizacije brojeva, fundamentalnih zakona prirode (genetika, entropija, princip neodređenosti itd.) i zakona verovatnoće, formiraju se viševrednosni (polivalentni) logički sistemi. Danas, može se konstatovati da u biološkim i poljoprivrednim naukama, u osnovi postoje dva analitički podeljena pristupa zaključivanju: zaključivanje u sistemu veštačke

metodološki pristup u biometrici, tj. Fišer je dokazao da se sve varijacije u biološkim pojavama mogu podeliti na objašnjene i neobjašnjene varijacije.

[14] Galton, Pirson i Weldon su na Oksfordu osnovali časopis Biometrika, što se uzima kao datum definisanja i objave biometričkih metoda, odnosno, metodološke osnove u primeni statistike u biološkim istraživanjima.

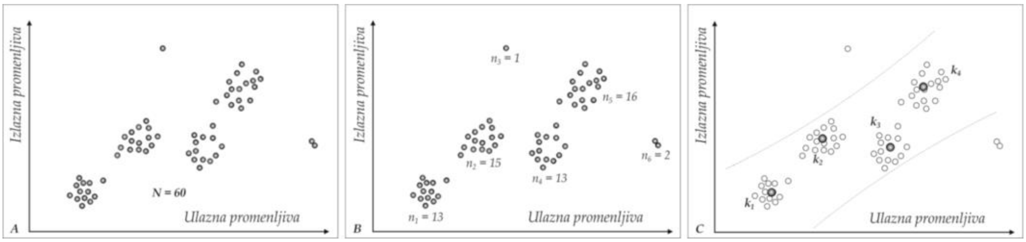
inteligencije i fazi zaključivanje. Zaključivanje u sistemu veštačke inteligencije podrazumeva primenu različitih algoritama za pretraživanje, u svim pravcima, kroz strukturu određenih baza znanja, koji pri tom uzimaju u obzir i faktor nesigurnosti (heurističko pretraživanje, tj. pretraživanje zasnovano na iskustvu eksperta). Međutim, zaključivanje u sistemu veštačke inteligencije nije interaktivno, za razliku od fazi zaključivanja. Naime, sistemi fazi zaključivanja su potpuno interaktivni i svako pravilo zaključivanja samo za sebe, u određenoj meri i određenom stepenu značenja, predstavlja fazi ekspertski sistem [1].

Tako, fazi zaključivanje ocenjuje važnost svih činjenica prema različitom stepenu pripadnosti, što znači da fazi zaključivanje ne može da se predstavi jednom tačnom zavisnošću, odnosno fazi pravila u osnovi nose dimenziju važnosti koja se karakteriše primenom novih pravila koja samo sugerišu zaključke i dozvoljavaju postojanje čitavog spektra izuzetaka.

Za razliku od polivalentnih načina zaključivanja, logičko–matematičko zaključivanje prema svom metodološkom pristupu bazira se na matematičkim iskazima, tačan ($\top$) ili netačan ($\perp$), i na matematičkom ekvilibriranju između *a priorne* i *a posteriorne* verovatnoće. Naime, baza za definisanje biometričke verodostojnosti je verovatnoća događanja, koja se argumentuje eksperimentom, što suštinski podrazumeva stohastičku verovatnoću koja je dokaziva *a posteriornom*, tj. biometričkom verovatnoćom, čija doslednost proizilazi iz *a priorne*, tj. matematičke verovatnoće. Tako pitanje verovatnoće generalno razmatra fenomen ponovljivosti, koji se u matematici simbolizuje slučajnošću (slučajne promenljive i slučajni procesi). Međutim, u biološkim i poljoprivrednim naukama svi procesi su determinisani datim uslovima i zakonitostima koje se sa aspekta verovatnoće događanja mogu posmatrati kao usmereni procesi ili procesi sa valjanim razlogom. Tako je osnovna dilema sa kojom se međusobno problematizuje pitanje matematičke logike i logike ponovljivosti procesa egzaktne nauke, pitanje da li su zakoni prirode suštinski determinisani, tj. determinističkog karaktera, pri čemu se slučajnost javlja samo kao nemogućnost doslednog poznavanja realnosti, odnosno brojnih uzročno−posledičnih veza u realnosti, ili slučajnost postoji objektivno kao suprotnost determinističkim procesima u biološkim pojavama.

Jasno je da biometrika utvrđuje strukturu matematičko−statističkog modela prema rezultatima eksperimenta, čime je u konačnom i određen prostor verovatnoće. Pritom, eksperiment se može ponavljati proizvoljan broj puta pod datim uslovima, s tim da su eksperimentom definisani svi mogući ishodi, dok su ishodi pojedinačnih pojavljivanja uglavnom nepoznati. Iz date konstatacije proizilazi da je zaključak u biometrici funkcija eksperimenta čiji analitički izraz ne zavisi od nepoznatih parametara obeležja [ne zavisi od svih mogućih a neopaženih biometričkih jedinica posmatranja, koje se nalaze u osnovnom skupu (induktivno zaključivanje)]. Iz ove konstatacije otvara se logično pitanje: "Kako iz logičko–matematičkih pravila zaključivanja preći na fazi pravila, tj. sa logike "da ili ne", na logiku "u ovom stepenu da, a u ovom stepenu ne", ili kako sa analitičkog pristupa zasnovanog na proceni verovatnoće događanja, preći na analitički pristup određenja pripadnosti posmatranoj pojavi sa akceptiranjem svih ispoljenih neodređenosti".

Iz iskustva nam je poznato da je prvi korak u naučnom istraživanju u biološkim i poljoprivrednim naukama klasifikacija, tj. izdvajanje reprezentativnih prirodnih grupa podataka iz osnovnog skupa u datim uslovima, sa ciljem uopštavanja (generalizacije), tj. dobijanja karakterističnih podskupova kao indikativnih subtendencija ili submodela karakterističnih ponašanja. Tako, grupisanje ili klaster analiza može da predstavlja prvi korak na putu analitičkog povezivanja logičko–matematičkog zaključivanja sa fazi zaključivanjem. Naime, klaster analiza [1, 7] predstavlja biometičku metodu svrstavanja konačnog broja eksperimentalnih podataka u homogene grupe, po jednoj ili više osobina (karakterističnih svojstava). Budući da se klaster analiza zasniva na razvrstavanju podataka na osnovu stepena pripadnosti određenom klasteru (grupi) ovim postupkom podaci sa dokazivom sličnošću (izražena tendencija ka jednom predstavniku grupe) uklanjaju se prelaskom na analizu sa jednim podatkom – centrom klastera, ali se u isto vreme identifikuju i rešavaju kontradiktorni (nepovezani) eksperimentalni podaci (Sl. 1).



Sl. 1. Grafički prikaz osnovnog principa grupisanja: A) hipotetički skup podataka (N = 60) sa jednom ulaznom i jednom izlaznom promenljivom; B) većina podataka je grupisana u četiri logičke grupe (klastera), što omogućava da se broj analitički indikativnih podataka svede na 4 (k_i); C) posebno važan cilj klaster analize predstavlja identifikacija kontra-diktornih podataka za ispitivani problem, a to u datom primeru predstavljaju usamljene tačke $n_3 = 1$ i $n_6 = 2$, koje ne mogu biti grupisane u ponuđene klastere (k_i) i potrebno je naći racionalno objašnjenje kako za njihovu pojavu u skupu eksperimentalnih podataka, tako i za njihovo isključivanje iz dalje analize.

Klasifikacija podataka, tj. grupisanje na osnovu ekspertske i logičko−matematičke argumentacije, treba da otvori uvid u moguće definisanje stepena pripadnosti, odnosno definisanje funkcije pripadnosti na osnovu koje se mogu izvoditi i fazi pravila, kao osnova fazi logičkih sistema za izvođenje fazi zaključaka.

Fazi logički sistemi

Fazi logika. Termin fuzzy (rasplinut) prvi put ističe Lofti Zadeh [19] navodeći da je potrebna radikalno nova vrsta matematike, matematika fazi kvantiteta, koje ne možemo opisati u kontekstu distribucije verovatnoće. Primjena fazi skupova u tehnikama poput prepoznavanja obrazaca i razmjene informacija takođe je potencirana [20]. Fazi logika je ukorenjena u viševrednosnoj logici kada su u pitanju formalizacija približnog rasuđivanja i istinitosne vrednosti u intervalu od 0 → 1, ali je drugačija od dvovrednosne i viševrednosnih logika, kada u svojoj koncepciji ima istinitosne vrednosti kao jezičke varijable. Specifičnosti fazi logike, poput ako – onda pravila i silogističkog rasuđivanja, čine je posebnim sistemom [24].

U ovom kontekstu važan je izomorfizam između dvovrednosne logike i teorije klasičnih skupova, te viševrednosne Lukašjevičeve logike i teorije fazi skupova. Da bi razvio n–vrednosnu logiku (n → ∞), Zadeh modifikuje Lukašjevičevu logiku redefinišući operacije poput negacije, unije ili preseka [2]. Ove operacije podudaraju se sa operacijama dvovrednosne logike za $n = 2$, a sa operacijama trovrednosne logike za $n = 3$.

Posledica navedenih konstatacija je činjenica da principi (ne)protivrečnosti i isključenja trećeg (sredine) u fazi logici više ne važe. Tačnije, ovi principi mišljenja važe do određenog stepena [6]. U kontekstu fazi logike, kao generalizacije klasične logike, postojanje netačnog (0) ili tačnog (1) iskaza proširuje se na interval u kojem iskaz ima beskonačno mnogo istinitosnih vrednosti [2, 20].

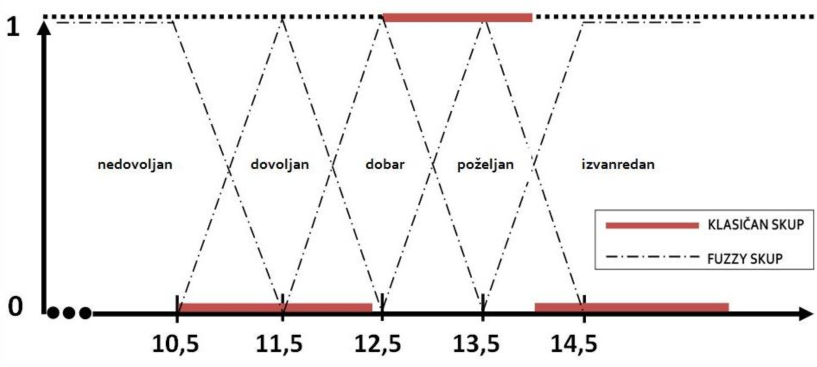
Fazi skup. Kada je u pitanju pripadnost elementa skupu, u klasičnoj teoriji skupova postoji jasna granica pripadnosti skupu, pa jedan element ili pripada ili ne pripada određenom skupu. Međutim, fazi skup predstavlja klasu[15] objekata sa razuđenim granicama, gde prelaz od pripadanja određenom skupu do nepripadanja tom istom skupu nije oštar već postepen, odnosno, fazi „skup“ je klasa objekata sa beskonačno mnogo stepeni pripadanja [20, 25, 26].

Fazi skup A iz univerzalnog skupa X odlikuje se funkcijom pripadnosti f_{A} ili μ_{A} koja dodeljuje svakom elementu x vrednost u zatvorenom intervalu [0 → 1] što čini stepen pripadnosti elementa ili $\mu_{\mathrm{A}}(x)$ pri čemu je $0 \leq \mu_{\mathrm{A}} \leq 1$ za $\forall x \in \mathrm{A}$. Element x može imati beskonačno različitih vrednosti unutar intervala. Dakle, fazi skup čini uređeni skup parova: element x i stepen pripadnosti $\mu_{\mathrm{A}}(x)$, što pišemo kao $\mathrm{A} = \{(x, \mu_{\mathrm{A}}(\mathrm{x})) \mid x \in \mathrm{X}\}$, gde $\mu_{\mathrm{A}}(x) \in [0 \to 1]$ čime je fazi skup potpuno definisan [18, 21].

Ako za primer uzmemo kvalitet pšenice kao osobinu (Sl. 2), pri čemu je glavni kriterijum postotak proteina u zrnu, standardnim pristupom podelićemo sve genotipove pšenice u tri klase: I (> 14 %), II (12,5 → 14 %) i III (10,5 → 12,4 %). To

[15] Kako bi se prevazišao „Raselov paradoks“ po pitanju skupa svih skupova, moguće rešenje je da skup svih skupova predstavlja klasu elemenata.

znači da ako se u zrnu nalazi 12,4 % proteina pšenicu svrstavamo u III klasu, a ako se u zrnu nalazi 12,5 % proteina pšenicu svrstavamo u II klasu. Posledice ovako oštrog prelaza između definisanih klasa mogu se umanjiti fazi pristupom [4].



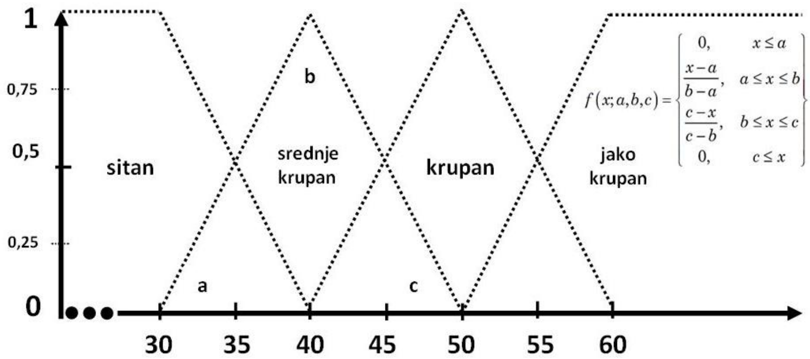
Sl. 2: Razlika između klasičnog skupa i fazi skupa
Difference between classical set and fuzzy set

Osobina *kvalitet* tako postaje jezička promenljiva sa epitetima nedovoljan, dovoljan, dobar, poželjan i izvanredan, pri čemu je prelaz između epiteta postepen, a svaka vrednost (% proteina) pripadaće epitetu u određenom intervalu [0 → 1].

Fazi skup ima određene karakteristike. Ako je $\mu_A(x) = 0$ element x ne pripada skupu, a ako je $\mu_A(x) = 1$ element x u potpunosti pripada skupu. Skup je prazan kada $\mu_A(x) = 0$ za svako x. Bilo koja dva fazi skupa su jednaka (A = B) ako su im isti svi stepeni pripadnosti $\mu_A(x) = \mu_B(x)$. Komplement određenog fazi skupa A je fazi skup A' definisan kao $\mu'_A = 1 - \mu_A$. Fazi skup A je podskup fazi skupa B ako je $\mu_A \leq \mu_B$.

Važan koncept za definisanje fazi skupa je jezička promenljiva. To je promenljiva čije vrednosti nisu brojevi, već reči i rečenice prirodnog ili veštačkog jezika [22, 23]. Ako je u pitanju izrazito kvalitativna osobina (uspešan, plavo itd.) jezička promenljiva dobija smisao, jer ne postoji način kojim bismo direktno kvantifikovali epitete [4].

Fazi jezička promenljiva je u celosti definisana uređenom petorkom [n, T(n), U, G, M]. Pritom, n je naziv promenljive, T(n) je skup epiteta, U je domen, G je sintaksičko pravilo čija funkcija daje numeričku vrednost epitetima, a M je semantičko pravilo koje definiše stepen pouzdanosti između kvantitativne (npr. 12,5 %) i kvalitativne vrednosti (npr. "dobar") epiteta [22, 23]. Jezička promenljiva je segmentovana epitetima, a epiteti vrednošću elemenata i stepenima pripadnosti. Fazi funkcije pripadnosti prikazujemo u koordinatnom sistemu pri čemu apscisu čini opseg epiteta (vrednosti definiše ekspert) a ordinatu čini interval fazi skupa [0 → 1] u kojem elementi dobijaju stepen pripadnosti. U praksi su najčešće zastupljene triangularne (Sl. 3) i trapezoidne (Sl. 4) fazi funkcije pripadnosti.



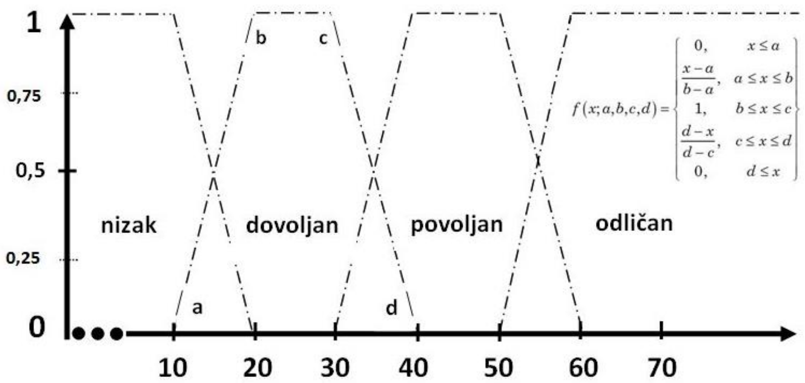
Sl. 3. Triangularne funkcije pripadnosti
Triangular membership functions

Fazi triangularna funkcija pripadnosti je potpuno definisana sa tri parametra: a, b i c. Parametri a i c su baza funkcije i predstavljaju opseg epiteta (npr. srednje krupan plod kruške od 30 – 50 *mm*), odnosno, određene vrednosti za koje je $\mu_A(x) = 0$. Parametar c je vrh funkcije i označava vrednost za koju je $\mu_A(x) = 1$ što čini maksimalni stepen pripadnosti epitetu (plod prečnika 40 *mm* pripada epitetu srednje krupan 100 %).

Ako za primer uzmemo kvalitet kruške kao osobinu, pri čemu je glavni kriterijum prečnik ploda, standardnim pristupom podelićemo plodove na sledeće klase: ekstra klasu (R > 60 *mm*), I klasu (55 → 60 *mm*) i II klasu (45 → 55 *mm*). Međutim, problem klasiranja nastaje kada se pojave plodovi kruške na granici između klasa (R = 60,1 *mm* ili R = 59,9 *mm*). Fazi logika rešava ovaj problem. Za svaki element na funkciji, prema navedenoj formuli određujemo vrednost epiteta promenljive kao presek na apscisi i stepen pripadnosti epitetu kao presek na ordinati. Tako, ako je plod kruške prečnika 44 *mm*, pripadnost epitetu krupan biće 40 % (a epitetu srednje krupan 60 %). Ako je plod prečnika 52 *mm* biće 80 % krupan (a 20 % jako krupan).

Trapezoidna funkcija pripadnosti je potpuno definisana sa 4 parametra: a, b, c i d. Parametri a i d su baza funkcije a parametri b i c protežu se na interval sa $\mu_A(x) = 1$.

Jezička promenljiva u ovom primeru biće prinos krompira (t/ha), a epiteti nizak, dovoljan, povoljan i odličan. Prinos krompira od 0 → 10 biće 100 % nizak, od 20 → 30 t/ha biće 100 % dovoljan, prinos od 40 → 50 t/ha biće 100 % povoljan, a prinos veći od 60 t/ha biće 100 % odličan. Za ostale vrednosti na funkciji, stepen pripadnosti računaćemo prema datoj formuli. Tako, ako je prinos krompira 17,5 t/ha $\mu_A(x) = 0,75$ odnosno prinos je 75 % dovoljan (25 % nizak) a ako je prinos 38 t/ha $\mu_A(x) = 0,20$ odnosno prinos je 20 % dovoljan (80 % povoljan).



Sl. 4. Trapezoidne funkcije pripadnosti
Trapezoid membership functions

U jednoj funkciji pripadnosti razlikujemo sledeće komponente: nosač (podršku, supremum), singlton, jezgro, visinu, tačku prolaska i α–presek [3, 5, 21, 27].

Nosač fazi skupa A u univerzalnom skupu X je klasičan skup koji sadrži sve elemente za koje važi $\mu_A(x) > 0$. Fazi singlton predstavlja fazi skup čiji se nosač sastoji od jedne tačke sa $\mu_A(x) = 1$. Tako, fazi skup možemo smatrati zbirom konstitutivnih singltona. U primeru koji se tiče kvaliteta kruške, nosač za epitet „srednje krupan“ čine vrednosti elemenata ovog epiteta $30 \le x \le 50$ (u datom primeru za prinos krompira nosač za epitet povoljan čine svi prinosi između 30 i 60 t/ha).

Jezgro čine elementi sa $\mu_A(x) = 1$. Kod triangularnih funkcija radi se o jednoj tački, a to su npr. plodovi kruške prečnika 40 *mm* ili 60 *mm* (u datom primeru za prinos krompira jezgra čine prinosi 20 → 30 t/ha i 40 → 50 t/ha).

Tačku prolaska čine vrednosti funkcije čiji je $\mu_A(x) = 0{,}5$. Tačke prolaska su 35, 45 i 55 (plodovi kruške) te 15, 35 i 55 (prinos krompira) što predstavlja pripadnost parametra koji ispitujemo graničnim fazi epitetima od 50 %.

Visina fazi skupa A $h(A)$ je maksimalna vrednost $\mu_A(x)$ u fazi skupu. Kada je u skupu $\mu_A(x) = h(A) = 1$ skup je normalan, inače je subnormalan [$h(A) < 1$]. Oba primera sadrže normalizovane skupove sa visinama 30, 40, 50, 60 (plodovi kruške) odnosno 10, 20, 30, 40, 50 i 60 (prinos krompira).

Alfa presek fazi skupa A je klasičan skup (A_α) koji sadrži elemente čije su funkcije pripadnosti veće ili jednake od zadatog α [$\mu_A(x) \ge \alpha$, slabi α–presek] ili veće od zadatog α [$\mu_A(x) > \alpha$, jaki α–presek]. Iz ovoga sledi da je nosač skupa A jednak jakom α–preseku za α = 0 a jezgro za α = 1. Alfa preseci se koriste za fazifikovanje klasičnih skupova, segmentaciju fazi skupa i sl. Za α = 0,5 možemo izračunati i tačke prolaska.

Ako u primeru sa plodovima kruške zadamo da je α = 0,25 a pritom poznajemo parametre a, b i c radi se o dva preseka (po datoj formuli, $f = \alpha$) epiteta „srednje krupan", tj. određivanju nepoznate x, pa tako vidimo da će plodovi kruške prečnika 32,5 → 40 *mm* i 40 → 47,5 *mm* imati pripadnost ovom epitetu veću od 0,25 tj. 25 % (biće u intervalu 25 % → 100 %) što pišemo kao $A_{0,25}$= {32,5; 47,5}.

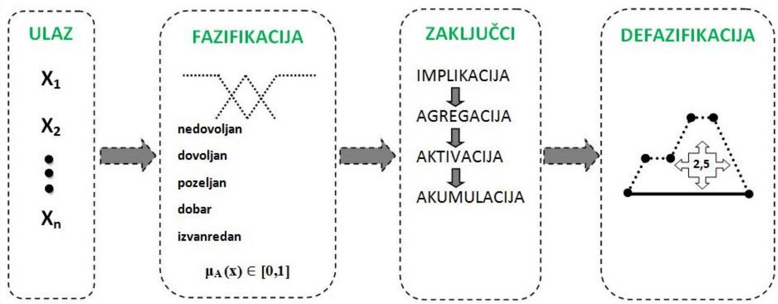
Različite fazi funkcije pripadnosti mogu se međusobno kombinovati. Samu funkciju pripadnosti biramo na osnovu kriterijuma: specifičnosti primene, pogodnosti, jednostavnosti, brzine i efikasnosti, te zavisno od prirode problema kojim se bavimo.

Fazi zaključivanje. U fazi skupu definisane su slične operacije kao i kod klasičnih skupova, a za proces fazi zaključivanja najznačajnije su operacije unije i preseka.

Unija dva fazi skupa A i B je fazi skup C koji sadrži sve uređene parove $(x, \mu_c(x))$ skupova A i B, pri čemu stepeni pripadnosti zajedničkih elemenata $\mu_C(x) = \max\{\mu_A(x), \mu_B(x)\}$ što pišemo kao $A \cup B = C = \{(x, \mu_C(x)) \mid x \in X\}$. Presek dva fazi skupa A i B je fazi skup C koji sadrži sve zajedničke parove skupova A i B, pri čemu $\mu_C(x) = \min\{\mu_A(x), \mu_B(x)\}$ što pišemo kao $A \cap B = C = \{(x, \mu_C(x)) \mid x \in X\}$.Unija fazi skupova u fazi zaključivanju odgovara operatoru OR (ILI) a presek operatoru AND (I).

Fazi skup A, iz primera koji se tiče prinosa krompira, za epitet „dovoljan", imaće sledeći oblik A = {(10; 0), (15; 0,5), (20; 1), (30; 1), (35; 0,5), (40; 0)} a drugi skup za epitet „povoljan" B = {(30; 0), (35; 0,5), (40; 1), (50; 1), (55, 0,5), (60; 0)}. Unija dva fazi skupa biće A ∪ B = {(10; 0), (15; 0,5), (20; 1), (30; 1), (35; 0,5), (40; 1), (50; 1), (55, 0,5), (60,0)}. Presjek dva fazi skupa biće A ∩ B = {(30; 0), (35; 0,5), (40; 0)}.

Fazi zaključivanje (Sl. 5) sastoji se od nekoliko sukcesivnih koraka kojim se od polazne karakteristike (fazi – ulaz), preko baze fazi pravila, dolazi do rešenja (fazi – izlaza), kao osnove za dalje upravljanje procesima.



Sl. 5. Proces fazi zaključivanja
Fuzzy inference process

U skladu sa tim, glavni koraci u procesu fazi zaključivanja su: identifikacija fazi – ulaza, fazifikacija, proces zaključivanja [definisanje fazi ako – onda (IF – THEN) pravila, agregacija, aktivacija i akumulacija pravila], defazifikacija i interpretacija.

Definisanje cilja i ulazne karakteristike, koja je često kvalitativni parametar, vrši najčeće ekspert iz vlastite spoznaje i iskustva.

U procesu fazifikacije dolazi do transformacije klasičnog skupa u fazi skup [6, 21, 22] i podele jezičke promenljive na epitete. Za svaki fazi epitet formira se opseg osobine (0 → 20, 10 → 30 itd.) i interval pouzdanosti [0 → 1] zavisno od pojave koja se analizira i vrste funkcije pripadnosti.

Postoji nekoliko načina fazi–logičkog zaključivanja: Tsukamoto–tip, Larsen–tip, Takagi/Sugeno/Kang–tip, te Mamdani–tip zaključivanja [2, 5, 17].

Pravila fazi zaključivanja imaju oblik sličan silogizmu u klasičnoj logici i mogu se predstaviti pojednostavljeno kao: *Ako **x** jeste **A** onda **y** jeste **B***. Parametri x i y su jezičke promenljive dok su parametri A i B epiteti. Prvi deo pravila čine jedna ili više premisa, vezane operatorom I/ILI, a drugi deo pravila je zaključak. Implikacijom za svako pravilo (min) i agregacijom po pravilima (max) utvrđujemo sa kojim stepenom poverenja ulazna numerička vrednost pripada datom fazi skupu, a nakon toga kolika je jačina pravila (aktivacija). Aktivirana pravila se sumiraju (akumulacija) prema nekoj od metoda fazi zaključivanja [17].

Proces aproksimativnog rezonovanja završava defazifikacijom. Dobijeni fazi broj (zaključak) konvertuje se u izlaznu vrednost kao realan broj metodama defazifikacije: diskontinualnim (diskretne, prekidne): sredina maskimuma (MOM), levi maskimum (LOM) i desni maksimum (ROM) ili kontinualnim (slučajne, neprekidne): polovljenje prostora (BOA), centar maksimuma (COM), te centar prostora/gravitacije ili centroid (COA/COG) sa svojim modifikacijama – prošireni i brzi COG/COA [5, 17].

Danas, fazi logika u užem smislu predstavlja logički sistem koji teži formalizaciji približnog rasuđivanja, a u širem smislu je deo teorije fazi skupova, zajedno sa fazi aritmetikom i programiranjem, fazi teorijom grafova, fazi topologijom i fazi analizom podataka [24].

ZAKLJUČAK

U biološkim naukama logičko-matematička argumentacija podrazumeva prethodno određenje pojma biometričke jedinice posmatranja, a potom pomoću prirodnih brojeva argumentaciju verovatnoće njegovog pojavljivanja u datim uslovima, tj. dokazivanje nivoa objašnjenih i neobjašnjenih varijacija (*Vk*, $S_{\bar{x}}$, Q_p, S_p^2 itd.) u ispoljavanju biometričkih jedinica posmatranja. Imajući u vidu da su sve biometričke jedinice posmatranja materijalne prirode, to se određenje pojma svodi na apstrahovanje njihove predmetnosti, s tim da se u analizi interakcijskih efekata promenljivih stalno mora imati na umu da u biometričkoj argumentaciji broj predstavlja apstrahovanu količinu tih prethodno apstrahovanih predmetnosti biometričkih jedinica posmatranja. Tako se otvara pitanje logike apstrahovanja količina atributivnog obeležja (jezičke promenljive): sitan, srednje sitan, srednje krupan, krupan, itd, ili pak obeležja koja su iskazana nulom (0 = nema ga, bez predmetnog obeležja je, itd.). Evidentno je da se izvođenje zaključaka u ovim situacijama ne može izvesti samo na osnovu matematizacije koja je bazirana na iskazima binarne logike (jeste $\top$, nije $\perp$, tj. 1, 0], pa se kao alternativa traže polivalentni (viševrednosni) logički sistemi. Kao prihvatljivi viševrednosni logički sistemi u biometričkom zaključivanju vide se: fazi logika, fazi skupovi i fazi zaključivanje. Kao prvi korak ka prelasku sa logičko–matematičkog zaključivanja na fazi logičko zaključivanje u biološkim i poljoprivrednim naukama vidi se klasifikacija, tj. klaster analiza, zatim fazi klasterizacija i u konačnom definisanje pravila za primenu fazi sistema, tj. fazi zaključivanje.

LITERATURA

1. Anđelković, B. (2005): Istraživanje i razvoj novih metoda za proračun steznih sklopova neuronskih mreža i fazi logike. Doktorska disertacija. Mašinski fakultet u Nišu;
2. Chen, G., Pham, T. T. (2001): Introduction to fuzzy sets, fuzzy logic, and fuzzy control systems. CRC Press LLC. ISBN 0-8493-1658-8. 316 str.;
3. Dubois, D., Prade, H. (2008): Gradual elements in a fuzzy set. Soft Comput 12: 165. doi:10.1007/s00500-007-0187-6;
4. Hajder, Đ. (2016): Evaluacija cilja istraživanja i biometričke argumentacije rezultata u magistarskim radovima Poljoprivrednog fakulteta Univerziteta u Banjoj Luci. Poljoprivredni fakultet. Univerzitet u Banjoj Luci. Master rad. 87.str.;
5. Klir, G. J., Yuan, B. (1995): Fuzzy sets and fuzzy logic. Prentice Hall PTR. New Jersey. ISBN 0-13-101171-5. 574 str.;
6. Kosko, B. (1986): Fuzzy Entropy and Conditioning. Information sciences 40, 165-174;
7. Mićić, N. (2011): Eksperimentalna biometrika. Laktaši: Grafomark. Univerzitet u Banjoj Luci. Poljoprivredni fakultet i Naučno voćarsko društvo Republike Srpske. ISBN 978-99938-93-18-9. 318 str.;
8. Mićić, N. (2013): Elementarna biometrika. Laktaši: Grafomark. Institut za genetičke resurse i Hortikulturno naučno društvo Bosne i Hercegovine. ISBN 978-99955-783-1-2. 231 str.;
9. Mićić, N., Bosančić, B. (2012): Varijabilitet i koeficijenti varijacije u biološkim i poljoprivrednim istraživanjima. Agroznanje, 13(3): 331-342. DOI: 10.7251 /AGRSR1203331M;
10. Mićić, N., Bosančić, B. (2013): Zamke deskriptivnog i inferencijalnog statističkog pristupa u biološkim i poljoprivrednim naukama. Agroznanje, 14(4): 617-630. DOI: 10.7251/AGRSR1304617M;

11. Mićić, N., Đurić, G., Kurtović, M. (2015): Neposredno i posredno uzročno–posledične veze u biometričkim istraživanjima, Radovi Poljoprivredno-prehrambenog fakulteta, Univerziteta u Sarajevu God. LX, broj 65/2;

12. Mićić, N., Đurić, G., Kurtović, M., Knezović, Z. (2014): Biometrika kao metoda naučnog istraživanja u biološkim i poljoprivrednim naukama. Radovi Poljoprivredno-prehrambenog fakulteta Univerziteta u Sarajevu, God. LIX, broj 64/2. str: 169-177;

13. Mićić, N., Đurić, G., Važić, B. (2009): Biometrika i eksperimentalna statistika. Agroznanje. ISSN 1512-6412. vol. 10, br. 3: 5-16;

14. Mićić, N., Kurtović, M., Knezović, Z., Bosančić, B. (2014): Cilj istraživanja i logičko–matematička argumentacija rezultata biometričkih analiza. Radovi Poljoprivredno–prehrambenog fakulteta Univerziteta u Sarajevu, God. LIX, broj 64/2. str 151-160;

15. Šikić, Z. (1987): Novija filozofija matematike. Beograd: Nolit. ISBN 86-19-01483-8. 314 str.;

16. Prodanović, T., Mićić, N. (1996): Naučno istraživanje – metode, procedura, jezik i stil. Agronomski fakultet Čačak i Institut za istraživanja u poljoprivredi Srbija. ISBN 86-82107-11-2. str. 1–152;

17. Tadić, D., Stanojević, P., Aleksić, M., Mišković, V., Bukvić, V. (2006): Teorija fazi skupova: primene u rešavanju menadžment problema. Skver. Mašinski fakultet. Kragujevac. ISBN 86-80581-98-4, 270 str.;

18. Veljak, L. (2011): Principi ontologije i pitanje o primatu ontologije nad logikom i gnoseologijom. Studia lexicographica, god. 5 (2011) Br. 2(9). str. 5–20;

19. Zadeh, L. A. (1961): From circuit theory to system theory. Proc. IRE, Vol. 50, pp 856-865;

20. Zadeh, L. A. (1965): Fuzzy sets. Information and Control 8, 338-353;

21. Zadeh, L. A. (1972): A fuzzy–set–theoretic interpretation of linguistic hedges. Journal of Cybernetics 2, 4–34;

22. Zadeh, L. A. (1973): Outline of a new approach to the analysis of complex systems and decision processes. IEEE Transaction on Systems. Man and Cybernetics SMC-3. 28-44;

23. Zadeh, L. A. (1975): The concept of a linguistic variable and its application to approximate reasoning. Part I. Information Sciences 8. 199–249;

24. Zadeh, L. A. (1994): Fuzzy logic, neural networks and soft computing. Communications of the ACM 37(3): 77-84;

25. Zadeh, L. A. (1996): Fuzzy Logic = Computing with Words. IEEE transactions on fuzzy systems, Vol. 4, No. 2. pp. 103–111;

26. Zadeh, L. A. (2002): From computing with numbers to computing with words - from manipulation of measurements to manipulation of perceptions. Int. J. Appl. Math. Comput. Sci. Vol.12, No.3. 307–324;

27. Zimmermann, H. J. (2010): Fuzzy set theory. John Wiley & Sons, Inc. WIREs Comp Stat 2010:2, 317–332.